La Logique Possibiliste Généralisée

Generalized Possibilistic Logic

M. Banerjee[1] D. Dubois[2] H. Prade[2] S. Schockaert[3]

[1] Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, mohua@iitk.ac.in

[2] IRIT, Université Paul Sabatier, Toulouse, dubois@irit.fr, prade@irit.fr

[1] School of Computer Science & Informatics, Cardiff University, Wales, UK, s.schockaert@cs.cardiff.ac.uk

Résumé :

Nous présentons un cadre logique minimal qui permet de raisonner avec des formules booléennes qualifiées par des bornes inférieures de degrés de nécessité ou de possibilité. Il s'agit d'un langage propositionnel enchâssé dans un autre qui qualifie les propositions du premier. La version tout-ou-rien de ce cadre correspond à une logique épistémique élémentaire MEL dont la syntaxe est un fragment de la logique modale KD, et dont un fragment permet de capturer les logiques tri-valuées de Łukasiewicz et de Kleene. Sa sémantique se décline en termes de sous-ensembles d'interprétations du langage propositionnel. La version valuée de cette logique épistémique généralise la logique possibiliste et sa sémantique est en termes de familles de distributions de possibilité. Nous montrons la complétude de cette logique par rapport à cette sémantique possibiliste.

Mots-clés :

Théorie des possibilités, logique épistémique, logique tri-valuée

Abstract:

We present a minimal logical setting for reasoning with Boolean formulas annotated with lower bounds of necessity or possibility degrees. It is in fact a standard propositional language embedded into another one, whose role is to express beliefs about propositions of the former. The all-or-nothing version of this setting corresponds to a simplified epistemic logic MEL, whose syntax is a fragment of the modal logic KD. A fragment of MEL is enough to capture three-valued logics of Łukasiewicz and Kleene. Its semantics can be expressed in terms of subsets of interpretation of the inner propositional language. The graded version of this epistemic logic generalizes possibilistic logic as well, and its semantics is in terms of sets of possibility distributions. We show the completeness of this logic w.r.t. this possibilistic semantics.

Keywords:

Possibility theory, epistemic logic, three-valued logic

1 Introduction

Il y a trois approches logiques pour formaliser l'incertitude due au manque d'informations et la notion de croyance subjective induite :

- La logique tri-valuée de Kleene [14] où on introduit une troisième valeur de vérité en plus de *vrai* et *faux*, et qui veut dire *inconnu* ; cette logique est vérifonctionnelle et se définit par des tables de vérité pour la négation (involutive) et la conjonction (le minimum).
- La logique épistémique introduite par Von Wright et Hintikka qui utilise le formalisme de la logique modale, la modalité de nécessité $\Box\alpha$ représentant la connaissance ou la croyance dans la proposition α. Elle s'appuie sur une sémantique de Kripke à base de relations d'accessibilité [12].
- La logique possibiliste, dont la syntaxe utilise des conjonctions de paires (α, a) formées d'une proposition booléenne α et d'un poids a, souvent sur $]0, 1]$ qui représente une borne inférieure du degré de nécessité de α au sens de la théorie des possibilités, interprété comme un degré de certitude [4].

Toutes ces approches semblant aborder des questions similaires (l'inconnu, la croyance, l'incertitude) il est naturel de leur chercher un cadre commun. C'est le but de cet article. On montre que ce qui différencie ces approches c'est leur pouvoir expressif. On propose un cadre général pour les prendre en compte toutes et pour les situer les unes par rapport aux autres. Plus précisément, on peut voir la logique tri-valuée comme moins expressive que la logique épistémique. Si on ne considère pas l'introspection, le langage de la logique épistémique peut être simplifié et sa sémantique se décliner en termes de distributions de possibilité tout ou rien. Le langage de la logique possibiliste peut être étendu à des négations et des disjonctions de paires (α, a). On obtient alors un langage dont la sémantique est celle de la

théorie des possibilités et qui peut exprimer la logique tri-valuée, la logique épistémique simplifiée, et la logique possibiliste. Notre approche s'inspire de celle esquissée par Hájek [11] dans son livre (p. 211 *et seq.*) et dans [10]. Elle en diffère car nous utilisons des modalités de croyance pondérées, tandis que ces auteurs utilisent un prédicat flou comme symbole modal. On présente d'abord la version tout ou rien (MEL [1]) de la logique possibiliste généralisée en montrant comment on prouve sa complétude sans le recours aux relations d'accessibilité. On rappelle des résultats récents qui montrent que la logique tri-valuée de Kleene peut être vue comme un fragment de MEL. Dans la section suivante, on décrit le formalisme de la logique possibiliste généralisée introduite dans [7]. Dans la dernière section avant la conclusion, on donne une nouvelle preuve de complétude plus simple que celle de [9].

2 La logique épistémique simplifiée

On considère un langage classique $\mathcal{L}$ propositionnel, avec k variables propositionnelles, $p_1, \ldots, p_k$. On note $\alpha, \beta, ...$ les formules de $\mathcal{L}$ obtenues avec les connecteurs booléens $\neg, \wedge, \vee$ usuels. Pour tout ensemble $\mathcal{B} \cup \{\alpha\}$ de formules de $\mathcal{L}$, $\mathcal{B} \vdash_{LP} \alpha$ signifie que α est une conséquence syntaxique classique de $\mathcal{B}$ en logique propositionnelle PL. Dans cette section, on construit un autre langage dans lequel un agent peut exprimer qu'il croit ou qu'il ignore certaines propositions de $\mathcal{L}$ [1].

2.1 Syntaxe

L'idée principale de la syntaxe est d'encapsuler chaque formule α de $\mathcal{L}$ dans une modalité notée $\Box$. On construit alors de nouvelles variables logiques de la forme $\Box\alpha$ qui expriment que l'agent croit que α est vrai. On sépare complètement les propositions de $\mathcal{L}$ qui concernent le monde réel et les propositions précédées du symbole $\Box$, qui décrivent l'état épistémique d'un agent. Les formules épistémiques, notées $\phi, \psi, \ldots$ forment un langage propositionnel $\mathcal{L}_\Box$ engendré récursivement à partir d'un ensemble $At = \{\Box\alpha : \alpha \in \mathcal{L}\}$ de formules atomiques définies à partir des formules du langage $\mathcal{L}$, et à l'aide des connecteurs booléens $\neg, \wedge$:

$\Box\alpha \in \mathcal{L}_\Box$, si $\alpha \in \mathcal{L}$;
$\neg\phi \in \mathcal{L}_\Box$, $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}_\Box$, si $\phi, \psi \in \mathcal{L}_\Box$.
La modalité du possible est $\Diamond\alpha := \neg\Box\neg\alpha$.

On appelle les formules de $\mathcal{L}_\Box$ des *formules épistémiques* car elles se réfèrent à l'état épistémique d'un agent, par opposition aux *formules ontiques* $\alpha \in \mathcal{L}$ qui se réfèrent au monde réel. Dans le langage $\mathcal{L}_\Box$, un agent peut déclarer qu'il est certain que la proposition α est vraie (sous la forme $\Box\alpha$) mais aussi :

- qu'il n'a pas d'argument en défaveur de α, sous la forme $\Diamond\alpha$;
- qu'il ignore si α est vrai ou faux, sous la forme $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$;
- qu'il sait si α est vrai ou faux, mais refuse de révéler sa croyance, sous la forme $\Box\alpha \vee \Box\neg\alpha$.

Dans la suite Γ représente un ensemble de formules de $\mathcal{L}_\Box$ déclarées par l'agent, et $\mathcal{B}$ un ensemble de formules de $\mathcal{L}$.

Dans cette approche, les modalités $\Box$ et $\Diamond$ ne s'appliquent qu'aux formules du langage propositionnel $\mathcal{L}$, contrairement aux logiques modales usuelles qui les enchâssent [13].

2.2 Axiomes

Le fait de pouvoir exprimer des croyances dans $\mathcal{L}_\Box$ suggère d'adopter les axiomes du système modal KD, à savoir :

Axiomes :
(LP) : (i) $\phi \to (\psi \to \phi)$;
(ii) $(\phi \to (\psi \to \mu)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \mu))$;
(iii) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to (\psi \to \phi)$;
(K) : $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$;
(N) : $\Box\alpha, \forall\alpha$ tel que $\vdash_{LP} \alpha$;
(D) : $\Box\alpha \to \Diamond\alpha$.
Règle d'inférence :
(MP) $\{\phi, \phi \to \psi\} \vdash \psi$.

(LP) indique que cette logique doxastique, nommée MEL, est une logique proposition-

nelle. Selon l'axiome K, si l'agent croit qu'une proposition se déduit d'une autre, il croit que cette dernière est vraie, dès qu'il croit que la première l'est. L'axiome D considère que la certitude est plus forte que la plausibilité, une contrepartie de l'inégalité entre fonctions de croyance et de plausibilité de Shafer, ou mesures de nécessité et de possibilité [4]. L'axiome N suppose que pour l'agent toutes les tautologies sont vraies. La notion de conséquence syntaxique à partir d'un ensemble Γ de formules (notée $\vdash_{MEL}$) est définie de façon classique.

Le langage de MEL est un fragment de ceux de KD45 ou de S5 (sa partie subjective). Les logiques modales sont souvent définies en partant de la syntaxe la plus générale qui étende LP, et en ajoutant des axiomes (tels **4, 5**) pour la simplifier. Ici on prend le parti opposé et on construit le plus simple langage épistémique à partir de LP. En fait, MEL peut se voir comme une logique propositionnelle standard avec des variables propositionnelles spécifiques construites à partir d'un autre langage propositionnel. Par construction, la déduction dans MEL est la déduction dans LP sur le langage induit par le vocabulaire At, avec des axiomes supplémentaires :

$$\Gamma \vdash_{MEL} \phi \iff \Gamma \cup \{K, N, D\} \vdash_{LP} \phi,$$

où $\{K, N, D\}$ sont toutes les instances des axiomes K, N, D. En particulier le théorème de la déduction est valide dans MEL.

Calculer les conséquences de Γ permet de mieux cerner l'état de connaissances de l'agent à partir de son témoignage, en construisant toutes les formules qu'il pourrait affirmer sans ajouter plus d'information. En fait, MEL est un fragment du système modal normal KD avec un langage restreint. En effet, $\Gamma \vdash_{MEL} \phi$, si et seulement si $\Gamma \vdash_{KD} \phi$, pour tout ensemble $\Gamma \cup \{\phi\}$ de formules de MEL.

2.3 Sémantique

Une valuation booléenne, est une application $w : PV \to \{0, 1\}$, avec $PV := \{p_1, \ldots, p_k\}$. Ces valuations (interprétations) forment l'ensemble $\mathcal{V}$. Pour une formule $\alpha \in \mathcal{L}$, $w \models \alpha$ veut dire que w satisfait (est un modèle de) α, c.-à-d., $w(\alpha) = 1$ (vrai). On note $[\alpha]$, l'ensemble des modèles de α. Donc $2^{\mathcal{V}} = \{[\alpha] : \alpha \in \mathcal{L}\}$.

Nous suivons verbatim la définition de Hintikka pour évaluer les formules $\Box\alpha$: "α est vrai dans tous les mondes possibles compatibles avec les croyances de l'agent" [1], et on note E l'ensemble de ces mondes. Un état épistémique est donc vu comme un ensemble de valuations propositionnelles (en fait leur disjonction). Chacune d'elles représente un état du monde possible pour l'agent. On suppose de plus que E est non-vide (sinon l'agent est incohérent).

La satisfaction des formules épistémiques est définie récursivement ainsi :
- $E \models \Box\alpha$, ssi $E \subseteq [\alpha], \forall \alpha \in At$.
- $E \models \neg\phi$, ssi $E \not\models \phi$.
- $E \models \phi \wedge \psi$, ssi $E \models \phi$ et $E \models \psi$.

C'est la sémantique *épistemique* de MEL. $E \models \Box\alpha$ veut dire que si l'état épistémique de l'agent est E, il croit que α est vrai. En voyant la fonction caractéristique de E comme une distribution de possibilité, il est clair que $E \models \Box\alpha$ peut s'écrire $N([\alpha]) = 1$ au sens de la mesure de nécessité basée sur E. De même, $E \models \Diamond\alpha$, ssi $E \cap [\alpha] \neq \emptyset$: Il y a au moins un état du monde possible pour l'agent, où α est vrai, soit $\Pi([\alpha]) = 1$ au sens de la mesure de possibilité basée sur E. De plus, $E \models \Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$ correspond à l'ignorance quant à α, car alors $E \cap [\alpha] \neq \emptyset, E \cap [\alpha]^c \neq \emptyset$. Cette information est non-triviale sur l'état épistémique de l'agent, même si elle ne dit rien sur l'état du monde.

On note $\mathcal{E}(\phi) = \{E \neq \emptyset : E \models \phi\}$ l'ensemble des modèles épistémiques de la formule $\phi \in \mathcal{L}_\Box$. Si Γ est un ensemble de formules épistémiques, $E \models \Gamma$ veut dire $E \models \phi$, pour tout $\phi \in \Gamma$. On note $\mathcal{E}(\Gamma)$ l'ensemble des modèles épistémiques de la base de

[1] Article Epistemic Logic, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http ://plato.stanford.edu/entries/logic-epistemic/index.html.

croyances Γ. On peut alors définir une inférence sémantique :

Définition 1 *Pour tout ensemble* $\Gamma \cup \{\phi\}$ *de formules épistémiques,* ϕ *est* conséquence sémantique *de* Γ*, noté* $\Gamma \models_{MEL} \phi$*, si* $\forall E \neq \emptyset$, $E \models \Gamma$ *implique* $E \models \phi$ *(autrement dit :* $\mathcal{E}(\Gamma) \subseteq \mathcal{E}(\phi)$*).*

2.4 Complétude

On peut aussi utiliser la sémantique propositionnelle standard, car $\mathcal{L}_\Box$ est aussi un langage propositionnel. Un modèle standard d'une formule épistémique est une interprétation v de $\mathcal{L}_\Box$, une application de At dans $\{0, 1\}$. Notons $\mathcal{V}_\Box$ l'ensemble de ces valuations. On peut définir une inférence sémantique standard : $\Gamma \models_{LP} \phi$ avec ces valuations. La logique propositionnelle qui utilise le langage $\mathcal{L}_\Box$, les axiomes (LP) et le modus ponens (MP) est saine et complète relativement à cette sémantique standard.

Pour la logique MEL, on doit se restreindre aux interprétations standard v qui respectent les axiomes K, D, et N, soit un sous-ensemble de $\mathcal{V}_\Box$ noté $\mathcal{V}_{MEL}$. Pour montrer la complétude de MEL il suffit de montrer que les interprétations standard de $\mathcal{V}_{MEL}$ sont en bijection avec les états épistémiques $\{E : \emptyset \neq E \subseteq \mathcal{V}\}$ et que la sémantique épistémique est équivalente à la sémantique classique restreinte à $\mathcal{V}_{MEL}$.

A toute valuation $v \in \mathcal{V}_\Box$, on peut attacher une fonction d'ensemble booléenne $g_v : 2^{\mathcal{V}} \to \{0, 1\}$ telle que :

$$g_v([\alpha]) := v(\Box\alpha), \Box\alpha \in At.$$

qui constitue une représentation de l'incertitude. Dans le cas de MEL, on peut définir exactement le type de mesure d'incertitude induite par ces valuations. On vérifie aisément que :

1. Si $v \in \mathcal{V}_\Box$ satisfait l'axiome N, alors $g_v(\mathcal{V}) = 1$.
2. Si $v \in \mathcal{V}_\Box$ satisfait l'axiome D alors $\forall A \subseteq \mathcal{V}, g_v(A) \leq 1 - g_v(A^c)$, et donc $g_v(\emptyset) = 0$ si N est supposé en plus.
3. Si $v \in \mathcal{V}_\Box$ satisfait les axiomes K et N, alors $\forall A, B \subseteq \mathcal{V}$:
   $g_v(A \cap B) = \min(g_v(A), g_v(B))$.

Le dernier résultat, à savoir que g_v est une mesure de nécessité, ne fait qu'exprimer que K et N impliquent l'équivalence entre $\Box(\alpha \wedge \beta)$ et $\Box\alpha \wedge \Box\beta$ en logique modale KD.

A tout $v \in \mathcal{V}_{MEL}$, on associe l'état épistémique

$$E_v := \{w \in \mathcal{V} : g_v(\mathcal{V} \setminus \{w\}) = 0\}.$$

Par définition de E_v, on vérifie que :

(i) Puisque g_v est une mesure de nécessité, E_v est unique et non-vide, et $v(\Box\alpha) = 1$ ssi $E_v \subseteq [\alpha]$.

(ii) $v \models_{LP} \phi$ ssi $E_v \models \phi$ (sémantique épistémique).

Pour toute valuation classique de $\mathcal{L}_\Box$ (qui vérifie les axiomes K, D, N), on peut donc définir un état épistémique unique. Inversement, tout état épistémique E induit une valuation du langage modal $\mathcal{L}_\Box$ comme suit :

$$v_E(\Box\alpha) := \begin{cases} 1 \text{ si } E \subseteq [\alpha]; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On obtient donc la complétude de MEL par rapport à la sémantique épistémique en vertu de la complétude de la logique propositionnelle :

Théorème 1 $\Gamma \vdash_{MEL} \phi \iff \Gamma \models_{MEL} \phi$.

On voit donc que la logique modale KD restreinte au langage épistémique $\mathcal{L}_\Box$ peut être vue comme la logique de la théorie des possibilités tout ou rien, soit la plus élementaire logique de l'information incomplète.

2.5 Situation de la logique de Kleene

La logique tri-valuée de Kleene utilise le même langage $\mathcal{L}$ que LP, mais elle considère trois valeurs de vérité ordonnées $V > I > F$ qui peuvent s'interpréter comme *vrai, inconnu et faux*, respectivement. On note t une valuation de PV dans $\{F, I, T\}$. On définit alors les connecteurs de négation $-$ et de conjonction $\sqcap$ et de disjonction $\sqcup$ comme ceux de Zadeh :

1. $-F = V, -V = F, -I = I$ (involution)
2. $t(\alpha \sqcap \beta) = \min(t(\alpha), t(\beta))$
3. $t(\alpha \sqcup \beta) = \max(t(\alpha), t(\beta))$

Néanmoins, ces valeurs de vérité ont un relent épistémique : *inconnu* s'oppose à *certain que vrai* et *certain que faux* et les valeurs $\{F, I, T\}$ renvoient à la connaissance d'un agent sur des propositions en fait booléennes. Si α et β couvrent l'étendue des possibles, leur disjonction devrait être vraie même si elles sont inconnues ($t(\alpha) = t(\beta) = I$), et pourtant $t(\alpha \sqcup \beta) = I$ [3]. Pour résoudre ce paradoxe, on peut plonger la logique de Kleene dans MEL comme expliqué dans [2]. Rappelons ces résultats.

En accord avec le sens de la modalité $\Box$, on peut traduire en MEL les affirmations « $t(p) = V$ » par $\vdash \Box p$, « $t(p) = F$ » par $\vdash \Box\neg p$, et donc « $t(p) = I$ » par $\vdash \neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p$ pour une variable propositionnelle p. Plus généralement, déclarer une proposition α vraie dans la logique de Kleene, c'est dire que $t(\alpha) = V$. On peut traduire toute affirmation de ce type en MEL par la procédure suivante [2] :

– Mettre α sous la forme d'une conjonction de clauses en forme normale négative : $\alpha = \sqcap_{i=1}^{q_\alpha} \sqcup_{j=1}^{q_i} \ell_{ij}$ avec $\ell_{ij} = p_k$ ou $-p_k$ (littéral).
– La traduction de $t(\alpha) = V$ dans MEL est la formule $\wedge_{i=1}^{q_\alpha} \vee_{j=1}^{q_i} \Box\ell_{ij}$ (en remplaçant la négation $-$ par $\neg$ dans ℓ_{ij}).

On remarque que cette traduction n'utilise qu'une partie du langage $\mathcal{L}_\Box$: on ne met le symbole $\Box$ que devant des littéraux, et on n'utilise pas la négation $\neg$ de $\mathcal{L}_\Box$. Il est montré dans [2] que ce fragment $\mathcal{L}_\Box^K$ de $\mathcal{L}_\Box$ capture exactement la logique de Kleene. En particulier $t(\ell_1 \sqcup \ell_2) = 1$ veut dire $\Box\ell_1 \vee \Box\ell_2$ et non $\Box(\ell_1 \vee \ell_2)$, ce qui résout le paradoxe si $\ell_1 = -\ell_2$. La logique de Kleene ne peut pas exprimer $\Box(\ell_1 \vee \ell_2)$.

Une valuation t en logique de Kleene est isomorphe à un modèle partiel en logique propositionnelle. Il suffit de poser $w(p) = 1$ si $t(p) = V$, et $w(p) = 0$ si $t(p) = F$. On a donc un état épistémique de la forme $E_t = [\cap_{i:t(p_i)=V} p_i \bigcap \cap_{i:t(p_i)=F} \neg p_i]$, qu'on peut qualifier de rectangulaire. Si B est une base de connaissances en logique de Kleene, $B \models_K \beta$ veut dire que si $t(\alpha) = V, \forall\alpha \in B$ alors $t(\beta) = V$. Soit $\mathcal{T}(B)$ la traduction de B en MEL avec la procédure ci-dessus. On a montré [2] que $B \models_K \beta$ si et seulement si $\mathcal{T}(B) \vdash_{MEL} \mathcal{T}(\beta)$ si et seulement si $\forall t, E_t \models \mathcal{T}(B) \Rightarrow E_t \models \mathcal{T}(\beta)$. Ce résultat indique bien que la logique de Kleene ne permet de modéliser que certaines formes d'information incomplète.

Ces résultats ont été étendus à la logique trivaluée de Łukasiewicz [2] qui correspond au fragment de $\mathcal{L}_\Box$ où on ne met le symbole $\Box$ que devant des littéraux.

3 Logique possibiliste

Dans sa forme de base, la logique possibiliste [4] représente des connaissances propositionnelles plus ou moins certaines, sous la forme de paires (α, a) où α est une formule propositionnelle de $\mathcal{L}$ et $a \in]0, 1]$ un degré de certitude positif. Sa sémantique s'exprime en termes de distributions de possibilité, qui sont des applications π de l'ensemble de toutes les interprétations propositionnelles $\mathcal{V}$ dans $[0, 1]$. Pour chaque valuation $w \in \mathcal{V}$, le degré $\pi(w)$ exprime à quel point w est *plausible*, c.-à-d. à quel point il est compatible avec la connaissance disponible. Elle raffine la notion d'état épistémique booléen (en indentifiant E au noyau $\{w : \pi(w) = 1\}$. Etant donné une distribution de possibilité π, les mesures associées de possibilité Π et de nécessité N évaluent à quel point respectivement une proposition est possible et nécessaire :

$$\Pi(\alpha) = \sup\{\pi(w) \mid w \models \alpha\}$$
$$N(\alpha) = 1 - \Pi(\neg\alpha) = \inf\{1 - \pi(w) \mid w \models \neg\alpha\}$$

On évalue les formules possibilistes (α, a) sur les interprétations du langage $\mathcal{L}$, à l'aide de la distribution de possibilité la moins spécifique telle que $N(\alpha) \geq a$ [4]. On utilise les axiomes de la logique propositionnelle avec un degré de nécessité 1, et le modus ponens pondéré : $\{(\alpha, a), (\neg\alpha \vee \beta, b)\} \vdash (\beta, \min(a, b))\}$.

La logique possibiliste ne prend en compte que

des ensembles de formules pondérées de la forme (α, a), soit des conjonctions d'assertions de la forme $N(\alpha) \geq a$. Dans certaines applications, on peut avoir besoin de relier de telles assertions en utilisant des connecteurs propositionnels différents. En programmation logique, par exemple, une règle (sans négation) telle que $p_1, \ldots, p_n \rightarrow q$, reliant des variables propositionnelles, signifie intuitivement que chaque fois que $p_1, \ldots, p_n$ sont connues comme vraies, on doit accepter q comme vraie également. Cela pourrait être exprimé en utilisant des mesures de nécessité et l'implication matérielle sous la forme $\neg(N(p_1) \geq 1) \vee \cdots \vee \neg(N(p_n) \geq 1) \vee (N(q) \geq 1)$ [8]. Cette proposition ne peut pas être exprimée en logique possibiliste. On le peut dans MEL sous la forme $\neg\Box p_1 \vee \cdots \vee \neg\Box p_n \vee \Box q$. Mais dans MEL, les mesures de nécessité sont tout ou rien.

4 Logique possibiliste généralisée

La logique possibiliste généralisée (LPG) [7] étend la logique possibiliste au sens où des énoncés de la forme (α, a) peuvent être combinés en utilisant n'importe quel connecteur propositionnel, plutôt que seulement la conjonction. Elle généralise donc aussi la logique MEL avec des modalités valuées.

4.1 Syntaxe et sémantique

Pour mettre en évidence que la sémantique de la LPG est basée sur la théorie des possibilités, on utilise dans cet article une notation légèrement différente de la syntaxe usuelle en logique modale, et de celle dans [6, 7, 8], où la notation est proche de celle de la logique possibiliste. Nous améliorons ainsi la lisibilité par rapport à ces derniers articles tout en soulignant le lien avec la logique modale. Soit $\Lambda = \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, ..., 1\}$, où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble des degrés de certitude considérés ; $\Lambda^+ = \Lambda \setminus \{0\}$. Si $a \in \Lambda^+$ on note $p(a)$ la valeur précédant a dans l'échelle. Les formules bien formées en logique possibiliste généralisée forment le langage propositionnel $\mathcal{L}^k_\Box$ défini comme suit :

- Si α est une formule propositionnelle ontique et $a \in \Lambda^+$, alors $\mathbf{N}_a(\alpha) \in \mathcal{L}^k_\Box$.
- Si ϕ et ψ sont des formules bien formées, alors $\neg\phi \in \mathcal{L}^k_\Box$ et $\phi \wedge \psi \in \mathcal{L}^k_\Box$.

Intuitivement, $\mathbf{N}_1(\alpha)$ signifie qu'on est complètement certain que α est vrai, tandis que $\mathbf{N}_a(\alpha)$ avec $a < 1$ signifie qu'il y a une information qui suggère que α est vrai, et que rien ne suggère que c'est faux (c.-à-d., on considère plus plausible que α soit vrai que α soit faux). $\mathbf{N}_1(\alpha)$ correspond à $\Box\alpha$ dans MEL. Les atomes de $\mathcal{L}^k_\Box$ sont donc de la forme $At^k = \{\mathbf{N}_a(\alpha) : \alpha \in \mathcal{L}; a \in \Lambda^+\}$.

Notons qu'il faut $k \geq 2$ (au moins trois niveaux de certitude) pour pouvoir distinguer entre certitude complète et certitude partielle. Formellement, un agent affirmant $\mathbf{N}_a(\alpha)$ est dans un état épistémique π tel que $N(\alpha) \geq a > 0$. En conséquence, $\neg\mathbf{N}_a(\alpha)$ équivaut à $N(\alpha) \leq p(a)$, qui signifie que $\Pi(\neg\alpha) \geq 1 - p(a) \in \Lambda^+$; syntaxiquement on écrit $\mathbf{\Pi}_b(\neg\alpha)$ avec $b = 1 - p(a)$.

La sémantique de la LPG est définie en termes de distributions de possibilité normalisées (c.-à-d., t.q. $\exists w\ \pi(w) = 1$) sur les interprétations propositionnelles, où les degrés de possibilité sont restreints à Λ. Au lieu d'évaluer de façon graduelle les formules possibilistes (α, a) sur les interprétations w du langage $\mathcal{L}$ [4], on peut choisir de les évaluer de façon tout ou rien sur les distributions de possibilité construites sur $\mathcal{V}$ [6, 7]. Une distribution de possibilité π est un modèle (épistémique) de :

- $\mathbf{N}_a(\alpha)$ (soit (α, a) en logique possibiliste usuelle) ssi $N(\alpha) \geq a$, où N est la mesure de nécessité induite par π ;
- $\phi_1 \wedge \phi_2$ ssi π est un modèle de ϕ_1 et de ϕ_2 ;
- $\neg\phi_1$ ssi π n'est pas un modèle de ϕ_1.

De manière naturelle, π est appelé modèle d'un ensemble Γ de formules de la LPG, ce qui s'écrit $\pi \models \Gamma$ si c'est un modèle de chacune des formules de cet ensemble. On écrit $\Gamma \models_{LPG} \phi$, pour un ensemble Γ de formules en LPG et ϕ une formule en LPG, ssi chaque modèle de Γ est aussi un modèle de ϕ. On dit qu'un modèle possibiliste π est booléen si $\pi(w) \in \{0, 1\}$ pour chaque monde possible w.

On considère l'axiomatisation suivante [9], qui étend celle de MEL [1].

(LP)
(K) : $\mathbf{N}_a(\alpha \to \beta) \to (\mathbf{N}_a(\alpha) \to \mathbf{N}_a(\beta))$;
(N) : $\mathbf{N}_1(\alpha), \forall \alpha$ tel que $\vdash_{LP} \alpha$;
(D) : $\mathbf{N}_a(\alpha) \to \mathbf{\Pi}_1(\alpha), \forall a \in \Lambda^+$;
(AF) : $\mathbf{N}_{a_1}(\alpha) \to \mathbf{N}_{a_2}(\alpha)$, si $a_1 \geq a_2$.
et la règle du modus ponens.

Dans (D), $\mathbf{\Pi}_1(\alpha)$ exprime $\neg \mathbf{N}_b(\neg\alpha), \forall b > 0$. On voit que quand a est fixé on obtient une copie de MEL (si on utilise $\mathbf{N}_a(\alpha) \to \neg \mathbf{N}_a(\neg\alpha)$ pour (D)). On récupère le modus ponens de la logique possibiliste et une règle hybride supplémentaire déjà suggérée en [5] :

Lemme 1 *Les règles d'inférence suivantes peuvent être établies :*
- $\{\mathbf{N}_{a_1}(\alpha), \mathbf{N}_{a_2}(\alpha \to \beta)\} \vdash \mathbf{N}_{\min(a_1,a_2)}(\beta)$
- $\{\mathbf{\Pi}_{a_1}(\alpha), \mathbf{N}_{a_2}(\alpha \to \beta)\} \vdash \mathbf{\Pi}_{a_1}(\beta)$
  si $a_2 > 1 - a_1$

Preuve: La première est obtenue en utilisant (AF) sur les deux prémisses (en les affaiblissant au niveau $\min(a_1, a_2)$), obtenant ainsi $\mathbf{N}_{\min(a_1,a_2)}(\alpha) \to \mathbf{N}_{\min(a_1,a_2)}(\beta)$ par modus ponens sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{N}_{\min(a_1,a_2)}(\alpha \to \beta)$, et à nouveau le modus ponens. La seconde est obtenue en établissant $\mathbf{N}_{1-p(a_1)}(\neg\alpha)$ à partir de $\mathbf{N}_{a_2}(\alpha \to \beta)$ et de $\mathbf{N}_{1-p(a_1)}(\neg\beta)$ (en réécrivant $\alpha \to \beta$ sous la forme $\neg\beta \to \neg\alpha$). On doit cependant supposer $1 - p(a_1) \leq a_2$, soit $a_1 + a_2 > 1$, afin d'affaiblir $\mathbf{N}_{a_2}(\alpha \to \beta)$ en $\mathbf{N}_{1-p(a_1)}(\alpha \to \beta)$. Si $1-p(a_1) > a_2$, (AF) ne fournit que $\mathbf{N}_{a_2}(\neg\alpha)$, dont la négation est plus faible que la prémisse $\mathbf{\Pi}_{a_1}(\alpha)$.

Le caractère sain de l'inférence syntaxique ne pose pas de problème à établir.

Proposition 1 (Correction) *Soit Γ une théorie en LPG, c.-à-d., un ensemble de formules de la LPG. Supposons que la formule de la LPG ϕ peut être dérivée de Γ par modus ponens et à partir des axiomes (LP,K, N, D, AF). Alors on a bien que $\Gamma \models_{LPG} \phi$.*

4.2 Complétude de la LPG

Pour la complétude, on procède comme dans le cas tout ou rien. Une valuation classique de $\mathcal{L}^k_\Box$ est une application $v : \mathbf{N}_a(\alpha) \in At^k \mapsto v(\mathbf{N}_a(\alpha)) \in \{0, 1\}$. L'axiome (AF) impose que si $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ et $0 < b \leq a$ alors $v(\mathbf{N}_b(\alpha)) = 1$. On peut alors définir une fonction d'ensemble g_v sur $\mathcal{V}$ comme suit

$$g_v([\alpha]) = \max\{a : v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1\}$$

avec la convention $g_v([\alpha]) = 0$ si $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 0, \forall a > 0$. Les autres axiomes de LPG imposent les contraintes suivantes à la fonction g :
- L'axiome (N) implique $g_v(\mathcal{V}) = 1$.
- Pour l'axiome (D), $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ implique $v(\mathbf{N}_a(\neg\alpha)) = 0, \forall a > 0$. Donc, si $g_v([\alpha]) = a > 0$, alors $g_v([\neg\alpha]) = g_v(\overline{[\alpha]}) = 0$. En particulier, $g_v(\emptyset) = 0$.
- Pour l'axiome K, notons que si $\alpha \vdash \beta$, il implique $\vdash \mathbf{N}_a(\alpha) \to \mathbf{N}_a(\beta)$, en vertu de l'axiome (N). Donc $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ implique $v(\mathbf{N}_a(\beta)) = 1$ et donc g_v est monotone croissante avec l'inclusion.
- On peut écrire l'axiome K comme suit : $\mathbf{N}_a(\alpha \to \beta) \to (\mathbf{N}_a(\alpha) \to \mathbf{N}_a(\alpha \wedge \beta))$. Si $v(\mathbf{N}_a(\alpha)) = 1$ et $v(\mathbf{N}_a(\beta)) = 1$, on a donc $v(\mathbf{N}_a(\alpha \to \beta)) = 1$; mais (K) implique $v(\mathbf{N}_a(\alpha \wedge \beta)) = 1$. Donc $g_v([\alpha \wedge \beta]) \geq \min(g_v([\alpha]), g_v([\beta]))$.

On conclut donc que la fonction g_v est une mesure de nécessité à valeurs sur Λ. Elle est définie complètement par une distribution de possibilité normalisée π_v. Il y a donc une bijection entre les valuations classiques de $\mathcal{L}^k_\Box$ qui satisfont les axiomes (K, N, D, AF) et les distributions de possibilité à valeurs sur Λ.

Proposition 2 (Complétude) *Soit $\Gamma \cup \{\phi\} \subset \mathcal{L}^k_\Box$ une théorie en LPG. $\Gamma \models_{LPG} \phi$ si et seulement si ϕ peut être dérivé de Γ par modus ponens et à partir des axiomes (LP, K, N, D, AF).*

Preuve: : $\Gamma \vdash_{LPG} \phi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{K, N, D, AF\} \vdash_{LP} \phi$ si et seulement si $\Gamma \cup \{K, N, D, AF\} \models_{LP} \phi$ (complétude de

la logique propositionnelle), si et seulement si $\Gamma \models_{LPG} \phi$ (en utilisant la bijection entre distributions de possibilité et les valuations classiques de $\mathcal{L}^k_\Box$ qui satisfont les axiomes (K, N, D, AF)).

5 Conclusion

Cet article fait donc la synthèse entre plusieurs logiques de l'information incomplète et montre le rôle central d'une sémantique en termes de distributions de possibilité. La logique possibiliste généralisée permet de couvrir toutes ces approches. Ces résultats organisent le paysage des diverses logiques dans ce domaine. Le cadre de la LPG est très expressif, mais sa complexité [9] est celle de S5 et dépend de k. Parmi les applications envisageables, la programmation logique offre des perspectives intéressantes. Un programme logique P de type ASP ne contient que des règles de la forme

$$r_1, ..., r_s, not\, p_1, ..., not\, p_m \rightarrow q_1 \oplus ... \oplus q_n$$

et des faits de la forme $r_1 \oplus ... \oplus r_n$ où r_i, p_j, q_k sont des variables propositionnelles, $\oplus$ est une disjonction, et $not\, r_i$ est une négation faible évoquant l'ignorance relative à la vérité de l'atome r_i. Pearce [15] a montré comment généraliser ce formalisme en le capturant dans une logique à cinq valeurs de vérité, la valeur médiane exprimant l'ignorance. Dans [8], on a montré comment la LPG avec une échelle Λ à trois niveaux ($k = 2$) peut exprimer, sous une forme plus facile à interpréter, les faits : $\mathbf{N}_1(r_1) \vee ... \vee \mathbf{N}_1(r_n)$ et les règles comme suit :

$$\neg\mathbf{N}_1(r_1)\vee...\vee\neg\mathbf{\Pi}_1(\neg p_m)\vee\mathbf{N}_1(q_1)\vee...\vee\mathbf{N}_1(q_n).$$

Notons que puisque l'échelle de possibilité possède trois niveaux, $\neg\mathbf{\Pi}_1(\neg p_m)$ n'est pas équivalent à $\mathbf{N}_1(p_m)$, mais à $\mathbf{N}_{1/2}(p_m)$, ce qui capture la particularité de la négation faible en ASP. Voir [9] pour une étude de la traduction de la logique à 5 valeurs de Pearce en LPG, dans le même style que celle de la logique de Kleene rappelée plus haut. Dans le futur, on peut reconsidérer les nombreuses sémantiques multivaluées en programmation logique et dans les bases de données avec valeurs nulles, ainsi que certaines logiques multi-agents [6], dans le cadre de la LPG.

Références

[1] M. Banerjee et D. Dubois. A simple modal logic for reasoning about revealed beliefs. In : *Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty* (ECSQARU 2009), C. Sossai, G. Chemello (Eds.), Springer, LNAI 5590, p. 805-816, 2009.

[2] D. Ciucci et D. Dubois. Three-valued logics for incomplete information and epistemic logic. In *Proc. 13th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA)*, Springer, LNAI 7519, 147–159, 2012.

[3] D. Dubois. On ignorance and contradiction considered as truth-values. *Logic Journal of the IGPL*, 16(2) :195–216, 2008.

[4] D. Dubois, J. Lang, et H. Prade. Possibilistic logic. In D. Nute D. Gabbay, C. Hogger J. Robinson, editor, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.

[5] D. Dubois et H. Prade. Resolution principles in possibilistic logic, *Int. J. of Approximate Reasoning*, 4(1), 1-21, 1990.

[6] D. Dubois et H. Prade. Toward multiple-agent extensions of possibilistic logic. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, London, 187–192, 2007.

[7] D. Dubois et H. Prade. Generalized possibilistic logic. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Scalable Uncertainty Management*, Springer, LNCS 6929, 428–432, 2011.

[8] D. Dubois, H. Prade, et S. Schockaert. Règles et métarègles en théorie des possibilités. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 26 :63–83, 2012.

[9] D. Dubois, H. Prade, et S. Schockaert. Stable models in generalized possibilistic logic. In *Proceedings of the 13th Inter. Conf. on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, Rome, June 10-14*, 2012.

[10] P. Hájek, D. Harmancova, F. Esteva, P. Garcia, et L. Godo. On modal logics for qualitative possibility in a fuzzy setting. In R. Lopez de Mantaras et D. Poole, editors, *Int. Conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 278–285. Morgan Kaufmann, 1994.

[11] P. Hájek. *The Metamathematics of Fuzzy Logics*. Kluwer Academic, 1998.

[12] J. Y. Halpern, R. Fagin, Y. Moses, et M.Y. Vardi. *Reasoning About Knowledge*. MIT Press (Revised paperback edition), 2003.

[13] G. E. Hughes et M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge, 1996.

[14] S. C. Kleene. Introduction to Metamathematics. North–Holland Pub. Co., Amsterdam, 1952.

[15] D. Pearce. Equilibrium logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 47 :3–41, 2006.